

Principi di Fisica per filosofi

a.a. 2010-2011

carlo cosmelli

L'argomento EPR

16.1.2011

L'argomento EPR

La versione O:

(fin troppo facile, in realtà poco comprensibile e fuorviante).

- 1) Consideriamo un sistema fisico composto da due parti [A,B] "opportunamente preparate" e separiamole portandole a grande distanza.
- 2) Misuriamo una certa proprietà P(A) al tempo t^* .
- 3) Sapremo quindi con certezza il valore della stessa proprietà P(B) al tempo t^* .
- 4) Dato che non c'è stato il tempo di comunicare a B il risultato di A, se ne deduce che B possedeva quella proprietà prima dell'istante t^* .
- 5) Ma la MQ ci fornisce solo la probabilità di avere un certo risultato per P(B) al tempo t^* .
- 6) Quindi c'è un elemento di realtà che la teoria non può prevedere.
- 7) Quindi la teoria è incompleta.



1. La notazione di Dirac

Ogni sistema fisico è descritto dalla relativa funzione d'onda $\psi(r,t) = \psi$

Consideriamo un generico stato ψ ottenuto da una combinazione di due stati ψ_1 e ψ_2 ognuno dei quali rappresenta uno stato diverso [per esempio $\psi_1 = "V"$ può essere lo stato di un fotone con polarizzazione verticale, cioè un fotone che ha il 100% di probabilità di passare un test di polarizzazione verticale, e $\psi_2 = "O"$ lo stato di un fotone con polarizzazione Orizzontale, cioè un fotone che ha il 100% di probabilità di passare un test di polarizzazione orizzontale]

$$\psi = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 \quad (1)$$

Dove le probabilità di ottenere lo stato ψ_1 o ψ_2 sono, rispettivamente:

$$P_1 = P(\psi_1) = [a_1]^2 \quad \text{e} \quad P_2 = P(\psi_2) = [a_2]^2 \quad (2)$$

La notazione di Dirac è la seguente:

$|\dots\rangle =$ rappresenta lo stato di un sistema ψ che, per esempio, si può scrivere come somma di due stati (risultati possibili) diversi:

i fattori a_1 (a_2) sono i coefficienti che determinano la probabilità di ottenere lo stato ψ_1 (ψ_2)

$$|\psi\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle$$

Le $|\psi\rangle$ sono le funzioni d'onda che descrivono gli stati. Notare che ψ_1 e ψ_2 corrispondono ai due soli risultati reali e possibili di una eventuale misura.

Per esempio nel caso di un fotone, polarizzato $V = \text{Verticalmente}$ ($O = \text{Orizzontalmente}$) posso scrivere:

$|V\rangle$: è lo stato di un di un fotone che passa al 100% un test con un polarizzatore Verticale.

$|O\rangle$: è lo stato di un di un fotone che passa al 100% un test con un polarizzatore Orizzontale.

Nel caso di un fascio di luce (un fotone) con polarizzazione a 45° , posso scomporre lo stato secondo due qualunque direzioni ortogonali, per esempio (V,O) e scrivere:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|O\rangle \quad (3)$$

dove i fattori $1/\sqrt{2}$ servono ad assicurare che la probabilità totale che il fotone “passi” il test o che “non passi” il test sia **1**, cioè sia lo stato “certo” [sono sicuro che il fotone o passa il test o non lo passa, non ho altre possibilità].

$$P(\text{passa } V) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} = 50\%$$

Infatti ho:

$$P(\text{passa } O) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} = 50\% \quad (4)$$

2. L'esperimento EPR

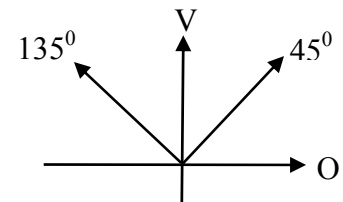
La trattazione segue quasi alla lettera la discussione dell'esperimento EPR fatta da G. C. Ghirardi nel libro “Un'occhiata alle carte di Dio” (2009). Queste poche righe sono una minima traccia del discorso logico, si consiglia di leggere il testo di G.C. Ghirardi per le molte ed approfondite discussioni dei punti chiave e delle sottigliezze legate al paradosso EPR.

2.1. Stati fattorizzati

Nel grafico sono indicate le direzioni delle due coppie di assi relativi alla polarizzazione dei fotoni o dei polarizzatori che verranno utilizzati in seguito.

Considereremo due coppie di assi ortogonali:

- 1) la coppia (V,O) : Verticale a 90° , Orizzontale a 0°
- 2) la coppia ruotata di 45° : le diagonali a 45° e a 135°



Nota: gli assi devono essere ortogonali perché così mi riduco a due casi (strumenti di misura) in cui un risultato esclude l'altro e i due risultati comprendono tutte le possibilità.

Consideriamo una sorgente **S** che, opportunamente eccitata, emette due fotoni indipendenti **1** e **2**, uno con polarizzazione verticale **V** e l'altro con polarizzazione orizzontale **O**.

Gli stati dei due fotoni possono essere scritti come:

$$|\psi_1\rangle = |1,V\rangle \quad \text{e} \quad |\psi_2\rangle = |2,O\rangle \quad (5)$$

E lo stato totale dei due fotoni posso scriverlo come:

$$|\psi\rangle = |1,V\rangle \cdot |2,O\rangle \quad (6)$$

Ecco cosa succede se faccio tre test di polarizzazione sui due fotoni, cambiando l'asse di polarizzazione di uno dei polarizzatori.

S è la sorgente; $|1,x\rangle$ e $|2,y\rangle$ sono i due fotoni emessi dalla sorgente; **P(O)**, **P(V)** e **P(45°)** sono i polarizzatori con l'asse di polarizzazione diretto rispettivamente **O**rizzontalmente, **V**erticalmente o a **45°**.

risultato	Polarizzatore	Sorgente di 2 fotoni	Polarizzatore	risultato
[passa al 100%]	← P(O)	$ 2,O\rangle \leftarrow S \rightarrow 1,V\rangle$	P(V) →	[passa al 100%]
[passa al 100%]	← P(O)	$ 2,O\rangle \leftarrow S \rightarrow 1,V\rangle$	P(O) →	[NON passa al 100%]
[passa al 100%]	← P(O)	$ 2,O\rangle \leftarrow S \rightarrow 1,V\rangle$	P(45°) →	[passa al 50%] [NON passa al 50%]

Si ricorda che il risultato della misura: "passa al 50%" sta a significare che la probabilità che passi sarà il 50%, quindi se ripeto la misura per esempio 100 volte, avrò "in media" che passerà 50 volte. Se faccio una sola misura avrò la probabilità del 50% che il fotone passi o che non passi, quindi sul risultato della singola misura non posso fare previsioni certe.

✂ Perché nel terzo caso il fotone $|1,V\rangle$ passa o non passa al 50%?

Scomponiamo lo stato $|1,V\rangle$ secondo le due direzioni 45° e 135° [vedi formula (9) per la scomposizione di uno stato secondo due direzioni ortogonali]:

$$|1,V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,45^\circ\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,135^\circ\rangle \quad (7)$$

Inseriamo a questo punto la (7) nella (6), ottengo:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,45^\circ\rangle \cdot |2,O\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,135^\circ\rangle \cdot |2,O\rangle \quad (8)$$

La (8) rappresenta lo stato di partenza dei due fotoni. Se ora faccio un test con il polarizzatore a 45° sul fotone 1, ho che il fotone passerà il test

Prima della misura:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,45^\circ\rangle \cdot |2,O\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,135^\circ\rangle \cdot |2,O\rangle$$

con la probabilità di $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = 1/2$

E' importante capire cosa succede **dopo** la misura.

Se il fotone **supera il test** (e questo avviene con la probabilità del 50%), subito dopo la misura, quindi all'uscita del polarizzatore, avrò avuto il collasso della funzione d'onda nello stato di uscita, il fotone avrà acquisito con certezza la polarizzazione a 45^0 , e la funzione d'onda sarà diventata:

$$\text{Dopo la misura: } |\psi\rangle = |1,45^0\rangle \cdot |2,O\rangle \quad (9)$$

cioè, essendo il fotone a 45^0 , non ho più la parte di $|\psi\rangle$ che descriveva lo stato del fotone 1 a 135^0 .



2.2.Stati entangled

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, in cui avevo lo stato (6), con un fotone **O** ed uno **V**, posso creare i seguenti stati, uno stato con i due fotoni entrambi $|V\rangle$ ed un altro con i due fotoni entrambi $|O\rangle$.

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= |1,V\rangle \cdot |2,V\rangle \\ |\Lambda\rangle &= |1,O\rangle \cdot |2,O\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Ora creiamo lo stato somma (cioè sovrapposizione lineare) dei due precedenti:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,V\rangle \cdot |2,V\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,O\rangle \cdot |2,O\rangle) \quad (11)$$

Lo stato $|\Phi\rangle$ che abbiamo creato viene chiamato stato “entangled” ed ha una serie di proprietà molto particolari:

Supponiamo di sottoporre lo stato ad un test di polarizzazione Verticale sul fotone 1: il fotone 1 ha il 50% di probabilità di passare il test Verticale.

Lo stesso risultato (50%) si avrebbe se facessi un test di polarizzazione Orizzontale sul fotone 1, o un test di polarizzazione Orizzontale o Verticale sul fotone 2. Avrei sempre una probabilità del 50% di passarli.

Supponiamo ora di voler fare un test con un polarizzatore a 45^0 oppure a 135^0 (direzioni ortogonali fra loro). Servono un po' di calcoli, vanno scomposti gli stati dei due fotoni secondo le nuove direzioni...il risultato è che posso scrivere lo stato $|\psi\rangle$, lo stesso di prima, come:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,45\rangle \cdot |2,45\rangle + |1,135\rangle \cdot |2,135\rangle] \quad (12)$$

Si vede che, analogamente al caso precedente [formula (11)], la probabilità di passare un test a 45° oppure a 135° è sempre del 50% sia per il fotone 1 che per il fotone 2.

$$P_1(45) = P_2(45) = 50\% \quad (13)$$

$$P_1(135) = P_2(135) = 50\% \quad (14)$$

Questo ragionamento, fatto per le due direzioni $(O,V)=(0^\circ, 90^\circ)$ e poi per le due direzioni $(45^\circ, 135^\circ)$, vale per qualunque altra coppia di direzioni ortogonali: $(20^\circ, 110^\circ)$, $(30^\circ, 120^\circ)$, $(110^\circ, 200^\circ)$, vale per qualunque angolo ...

...cioè ognuno dei due fotoni ha una Probabilità $P=1/2$ di passare un test lungo una qualsiasi direzione arbitraria: **SEMPRE**.

- ⇒ **Non esiste alcuna direzione in cui la Polarizzazione possa essere preveduta con certezza.**
- ⇒ **Ma in ogni caso il risultato ottenuto per qualunque test è lo stesso per tutti e due i fotoni.**

Il termine “entangled” sta appunto a significare questa caratteristica di “interlacciamento” fra due fotoni, ben differente dai due fotoni fattorizzati incontrati precedentemente, in cui entrambi si comportavano indipendentemente da quanto avveniva all’altro fotone.

Se per esempio faccio un test di polarizzazione sul fotone **1** lungo una qualsiasi direzione **n**(arbitraria), e se suppongo che passi il test, ottengo in uscita lo stato:

$$|\psi\rangle = |1,n\rangle \cdot |2,n\rangle \quad (15)$$

Quindi dopo la misura sul fotone **1** (supponendo che abbia passato il test “**n**”, e questo avviene nel 50% dei casi) ho che il fotone **2** ha “acquisito” la polarizzazione **n**, cioè sono sicuro, (ho una probabilità del 100%) che passerà un test di polarizzazione secondo **n**.

Il punto essenziale dello stato entangled è questo:

- **Prima** di ogni misura posso solo dire che avrò il 50% di probabilità di passare un qualunque test di polarizzazione secondo una qualunque direzione **n**.
- **Dopo** una misura (secondo **n**) avrò il 100% di probabilità di passare lo stesso test sia per il fotone misurato che per l’altro. I due fotoni avranno entrambi acquisito la proprietà di essere polarizzati secondo **n**.

2.3. L'argomento EPR

Ricordiamo le definizioni/premesse dell'articolo EPR.

1. *Realismo: se, senza disturbare in alcun modo un sistema, è possibile prevedere con certezza il risultato di una misura di un'osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente il sistema "possiede oggettivamente" (per oggettivamente si intende: indipendente da qualunque osservatore e dal fatto che la misura in questione venga fatta oppure no) la relativa proprietà.*
2. *Località Einsteiniana: gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.*

✧ Nell'articolo EPR gli autori assumono l'ipotesi di località per tutti i processi fisici.

L'argomento è il seguente:

1. Assumiamo uno stato composto da due fotoni entangled come nella (11):

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,V\rangle \cdot |2,V\rangle + |1,O\rangle \cdot |2,O\rangle] \quad (16)$$

2. Allontaniamo i due fotoni fin quando saranno: il fotone 1 in A , il fotone 2 in B. La distanza $AB=d$ è molto maggiore di $c \cdot dt$ (vedi dopo).
3. Eseguiamo, al tempo t e nel punto A, un test di polarizzazione sul fotone **1** con un polarizzatore verticale = V . Se il fotone passa il test, allora un istante dopo lo stato del sistema sarà:

$$\psi(t + dt) = |1,V\rangle \cdot |2,V\rangle \quad (17)$$

4. Quindi l'osservatore in **A**, solidale con il polarizzatore, potrà prevedere con certezza, senza disturbarlo, che il fotone **2** passerà un test di polarizzazione verticale con la probabilità del 100%, quindi con certezza, se facessi una misura in B la tempo $t+dt$.
5. Quindi il fotone **2** ha un elemento di realtà fisica, la polarizzazione V (vedi definizione di realismo).
6. Ma, per l'ipotesi di località, la misura in **A** non può aver influito sul fotone **2**, quindi il fotone **2** possedeva questa proprietà anche prima della misura fatta all'istante t , indipendentemente dalla misura fatta sul fotone **1**.
7. Quindi c'è un elemento di realtà che la teoria non è in grado di descrivere.
8. Quindi la teoria è incompleta.

